Développement : Développement asymptotique à trois termes de la série harmonique

Analyse & Probabilités

Référence : [ENS] Francinou S., Gianella H., Nicolas S., *Exercices de mathématiques - Oraux X-ENS - Analyse 1*, Cassini, 2007, p145.
Pour les leçons :
- 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
- 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Le but de ce développement est de trouver un développement asymptotique à deux termes de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Lemme 1.

Soit $\alpha > 1$. Alors :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Preuve : Soient $N \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, $k \in [\![n+1;N]\!]$ et $t \in [k;k+1]$. La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$. Donc :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

En sommant pour $k \in [\![n+1;N]\!]$:

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ et en effectuant un décalage d'indice dans la première somme,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

On a en outre, puisque $\alpha > 1$:

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_{n+1}^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_{n+1}^{+\infty} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Ainsi :

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} + \frac{1}{(n+1)^\alpha},$$

i.e. :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} \leqslant \frac{\alpha-1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} + \frac{1}{n^{1-\alpha}(n+1)^\alpha}.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure. □

Théorème 2. ***Développement asymptotique à trois termes de la série harmonique.***

Il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La constante γ est appelée *constante d'*Euler.

PREUVE : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.
⋆ ÉTAPE 1 : Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Or, on a l'inégalité de concavité suivante :

$$\forall x > -1 \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. On a de même :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0,$$

et donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Enfin, $u_n - v_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Donc } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}}$$

⋆ ÉTAPE 2 : Développement asymptotique à trois termes de la série harmonique.
D'après le théorème des suites adjacentes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite $\gamma \in \mathbb{R}$. Donc :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $t_n = u_n - \gamma$. Cherchons un développement asymptotique de t_n en $+\infty$. Pour cela, calculons, pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= u_n - u_{n-1} \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{-1}{2n^2}$ est une série à termes de signe constants convergente (série de RIEMANN, $2 > 1$). D'après le théorème de sommation des relations de comparaisons, $\sum_{n\geqslant 2}(t_n - t_{n-1})$ converge et :

$$\begin{aligned} -t_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

d'après le lemme, pour $\alpha = 2$. Par conséquent, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, et :

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),}$$

ce qui achève la preuve. □

Remarques 3.

[1] On pourrait aller plus loin en posant $w_n = t_n - \frac{1}{2n}$ (et faire la même chose, en utilisant le lemme), et on trouverait que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
[2] On ne sait pas grand chose sur la constante γ, notamment si elle est rationnelle ou non.